مراد کریمی
دبیر ریاضی شهرکرد

تشخیص تابع نمایی با جدول

اشاره

برای ورود به مطلب، ابتدا به معرفی اجمالی تابع نمایی و بیان برخی از ویژگی‌های آن می‌پردازیم و سپس روش تشخیص تابع نمایی را از روی جدول مطرح می‌کنیم و سه روش یافتن ضابطهٔ تابع نمایی به کمک جدول را بیان خواهیم کرد.

تعریف تابع‌نمایی

هر تابعی به شکل کلی $y=f(x)=ka^x$ با شرایط $a>0$ و $a\neq1$ و $k\neq0$ یک تابع نمایی است.

ویژگی‌های تابع‌نمایی

۱. با توجه به تعریف تابع نمایی a نمی‌تواند منفی، صفر و یک باشد.

۲. دامنهٔ تابع نمایی $y=ka^x$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

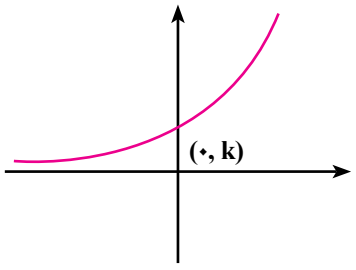
۳. برد تابع نمایی $y=ka^x$ اگر $k>0$ مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت، و اگر $k<0$ مجموعه اعداد حقیقی منفی است.

۴. تابع نمایی $y=ka^x$ تابع یک به یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است.

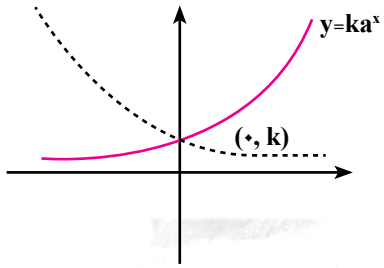
۵. تابع نمایی $y=ka^x$ همواره از ناحیه‌های اول و دوم، یا از ناحیه‌های سوم و چهارم محورهای مختصات می‌گذرد.

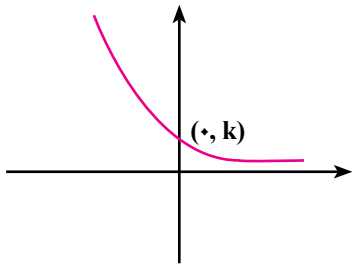
۶. تابع نمایی $y=ka^x$ همواره از نقطهٔ $(0,k)$ می‌گذرد (محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض k قطع می‌کند).

۷. در تابع $y=ka^x$ $(k>0\ ,\ a>1)$ با افزایش مقادیر x، مقادیر y نیز افزایش می‌یابند. بنابراین تابع افزایشی است.



۸. در تابع $y=ka^x$ $(k>0\ ,\ 0<a<1)$ با افزایش مقادیر x، مقادیر y کاهش می‌یابند. بنابراین تابعی کاهشی است.





الف) روش تشخیص تابع نمایی از روی جدول

می‌دانیم در توابع نمایی $y=ka^x$ $(a>1)$ همواره به ازای افزایش مقدار ثابتی در مقادیر ورودی (متغیر مستقل)، مقادیر خروجی (متغیر وابسته) در عدد ثابت و مثبت غیر یک ضرب می‌شوند. بنابراین، اگر در یک جدول مقادیر x و y از یک رابطه، داده شده باشد، چنانچه دامنهٔ تغییرات x به‌صورت منظم و در یک فاصلهٔ معین باشد (دنبالهٔ حسابی باشند) و میزان تغییرات مقادیر y بر اثر ضرب در یک عدد ثابت باشد (دنبالهٔ هندسی باشند)، داده‌های این جدول می‌توانند بیانگر رفتار یک تابع نمایی باشند.

● **مثال ۱.** مشخص کنید داده‌های مربوط به کدام‌یک از جداول زیر بیانگر تابع نمایی است.

x	۰	۱	۲	۳
y	۳	۶	۱۲	۲۴

(+۱، +۱، +۱ روی x؛ ×۲، ×۲، ×۲ روی y)

جدول ۱.

حل جدول ۱. با توجه به جدول، به ازای افزایش هر واحد در مقادیر x (یک واحد)، مقادیر y در یک عدد ثابت (۲+) ضرب می‌شوند. پس جدول ۱ یک تابع نمایی را مشخص می‌کند.

x	۴	۶	۸	۱۰
y	۵	۹	۱۳	۱۷

(+۲، +۲، +۲ روی x)

جدول ۲.

حل جدول ۲. با توجه به جدول، به ازای افزایش ۲ واحدی در مقادیر x، مقادیر y در هیچ عدد ثابت مثبت غیر یک ضرب نمی‌شوند. پس جدول ۲ یک تابع نمایی را مشخص نمی‌کند.

x	۱	۲	۴	۵
y	۲	۶	۱۸	۵۴

(×۳، ×۳، ×۳ روی y)

جدول ۳.

حل جدول ۳. با توجه به جدول، با اینکه هر یک از مقادیر y با ضرب در یک عدد ثابت (۳+) حاصل می‌شوند، ولی مقادیر x به مقدار ثابتی افزایش نمی‌یابند. پس جدول ۳ تابع نمایی را نمایش نمی‌دهد.

x	۱	۰	-۱	-۲
y	۴	۱	-۲	-۵

جدول ۴.

حل جدول ۴. در جدول ۴ دامنهٔ تغییرات x و y نامنظم است و علاوه بر آن، بعضی مقادیر y، عددهای منفی هستند. بنابراین جدول ۴ تابع نمایی را نمایش نمی‌دهد.

ب) روش‌های پیدا کردن ضابطهٔ تابع نمایی از روی جدول

روش اول: قرار دادن مختصات دو نقطه در تابع:

در این روش مختصات دو نقطهٔ دلخواه از جدول را در تابع $f(x)=ka^x$ قرار می‌دهیم و سپس با تقسیم کردن جمله درجهٔ بیشتر بر جملهٔ با درجهٔ کمتر، ابتدا مقدار a و سپس مقدار k را به‌دست می‌آوریم و در ضابطهٔ کلی تابع نمایی قرار می‌دهیم.

● **مثال ۲.** ضابطهٔ تابع مربوط به جدول‌های زیر را به دست آورید.

x	۱	۳	۵
y	-۱۹۲	-۲۴	-۳

جدول ۵.

$$f(1)=-192 \Rightarrow f(1)=ka^1=-192$$

$$f(3)=-24 \Rightarrow f(3)=ka^3=-24$$

$$\Rightarrow \frac{f(3)}{f(1)}=\frac{ka^3}{ka^1}=\frac{-24}{-192} \Rightarrow a^2=\frac{1}{8} \overset{a>0}{\Rightarrow} a=\frac{1}{\sqrt{8}}$$

$$ka=-۱۹۲\Rightarrow\frac{۱}{\sqrt{۸}}k=-۱۹۲$$

$$\Rightarrow k=\frac{-۱۹۲}{\frac{۱}{\sqrt{۸}}}=-۱۹۲\sqrt{۸}$$

$$f(x)=ka^x\Rightarrow f(x)=-۱۹۲(\sqrt{۸})(\frac{۱}{\sqrt{۸}})^x$$

x	۰	۱۰	۲۰
y	۸۰	۴۰	۲۰

جدول ۶.

$$f(۰)=۸۰\Rightarrow f(۰)=ka^۰=۸۰$$

$$f(۱۰)=۴۰\Rightarrow f(۱۰)=ka^{۱۰}=۴۰$$

$$\Rightarrow\frac{f(۱۰)}{f(۰)}=\frac{ka^{۱۰}}{ka^۰}=\frac{۴۰}{۸۰}\Rightarrow a^{۱۰}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=\sqrt[۱۰]{\frac{۱}{۲}}$$

$$ka^۰=۸۰\Rightarrow k=۸۰$$

$$f(x)=ka^x\Rightarrow f(x)=۸۰(\frac{۱}{۲})^{\frac{x}{۱۰}}$$

روش دوم: استفاده از دنبالهٔ هندسی: می‌دانیم که بعضی از مقادیر یک تابع نمایی، یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت مثبت و غیر یک و با دامنهٔ N و ضابطهٔ $y=ka^x$ است. زیرا جملهٔ عمومی دنبالهٔ هندسی به‌صورت $t_n=a_۱.q^{n-۱}$ یا به‌صورت $t_n=\frac{a_۱}{q}.q^n$ نوشته می‌شود که همان $y=k.a^x$ با دامنهٔ N است. بنابراین، برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع نمایی از روی دنبالهٔ هندسی، کافی است x را به n و f(x) را به t_n تبدیل و سپس نقش n و x را عوض کنیم.

● **مثال ۳.** ضابطهٔ تابع مربوط به جدول ۷ را به‌دست آورید.

x	۰	۱۰	۲۰
y	۸۰	۴۰	۲۰

جدول ۷.

$$t_{۱۰}=۴۰\Rightarrow t_{۱۰}=aq^۹=۴۰$$

$$t_{۲۰}=۲۰\Rightarrow t_{۲۰}=aq^{۱۹}=۲۰$$

$$\Rightarrow\frac{t_{۲۰}}{t_{۱۰}}=\frac{aq^{۱۹}}{aq^۹}=\frac{۲۰}{۴۰}\Rightarrow q^{۱۰}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow q=\sqrt[۱۰]{\frac{۱}{۲}}$$

$$aq^۹=۴۰\Rightarrow a\left[\sqrt[۱۰]{\frac{۱}{۲}}\right]^۹=۴۰\Rightarrow a=\frac{۴۰}{\left[(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۱۰}}\right]^۹}=\frac{۴۰}{(\frac{۱}{۲})^{\frac{۹}{۱۰}}}$$

$$t_n=a.q^{n-۱}=\frac{۴۰}{(\frac{۱}{۲})^{\frac{۹}{۱۰}}}\left[(\frac{۱}{۲})^{\frac{۱}{۱۰}}\right]^{n-۱}=\frac{۴۰}{(\frac{۱}{۲})^{\frac{۹}{۱۰}}}\left[(\frac{۱}{۲})\right]^{\frac{n}{۱۰}-\frac{۱}{۱۰}}$$

$$=۴۰\times(\frac{۱}{۲})^{\frac{n}{۱۰}-\frac{۱}{۱۰}-\frac{۹}{۱۰}}=۴۰.(\frac{۱}{۲})^{\frac{n-۱۰}{۱۰}}=۴۰.(\frac{۱}{۲})^{\frac{n}{۱۰}-۱}$$

$$=\frac{۴۰}{(\frac{۱}{۲})^۱}\times(\frac{۱}{۲})^{\frac{n}{۱۰}}=۸۰.(\frac{۱}{۲})^{\frac{n}{۱۰}}\Rightarrow f(x)=۸۰.(\frac{۱}{۲})^{\frac{x}{۱۰}}$$

روش سوم: استفاده از دستور $(y=k.q^{\frac{x}{d}})$: در این دستور، k ضریب، q قدرنسبت دنبالهٔ هندسی و d قدر نسبت دنبالهٔ حسابی است (در این روش به کمک یک نقطهٔ دلخواه مقدار k را محاسبه می‌کنیم).

● **مثال ۴.** ضابطهٔ تابع مربوط به جدول ۸ را به‌دست آورید.

x	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰
y	۱۶	۱۲	۹	۶/۷۵

جدول ۸.

$$\text{قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مقادیر } x = d=۲۰-۱۰=۱۰$$

$$\text{قدرنسبت دنبالهٔ هندسی مقادیر } y = q=\frac{۱۲}{۱۶}=\frac{۳}{۴}$$

$$y=k.q^{\frac{x}{d}}\Rightarrow ۱۶=k.(\frac{۳}{۴})^{\frac{۱۰}{۱۰}}=\frac{۳}{۴}k\Rightarrow k=\frac{۱۶}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۶۴}{۳}$$

$$y=k.q^{\frac{x}{d}}\Rightarrow y=\frac{۶۴}{۳}.(\frac{۳}{۴})^{\frac{x}{۱۰}}$$

تمرین: ضابطهٔ مربوط به جدول ۹ را از سه روش فوق به‌دست آورید.

x	۱	۲	۳
y	۶	۳	$\frac{۳}{۲}$

جدول ۹.